

УДК 621.647

**ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА  
УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ  
ДЛЯ РАСПЫЛЕНИЯ ЖИДКИХ СРЕД**

© А. В. Мовчанюк, НТУУ «КПИ», Киев, Украина

**Представлена математична модель, що описує коливання стержня змінного перетину. Отримано результати аналітичного дослідження, що дозволяють оптимізувати п'єзоперетворювачі з урахуванням масо-габаритних показників.**

**The mathematical model which describes vibration of variable cut rod is presented. There are given results of analitical research which make it able to optimise piesoceramics by weight parameters.**

**Введение**

Получение мелкодисперсных аэрозолей для применения в различных технологических циклах является актуальной задачей в различных отраслях, например, в энергетике при создании парогенераторов, в медицине при лечении дыхательных путей. Для диспергирования жидких сред применяются различные методы, в том числе ультразвуковой, когда аэрозоль получают на вибрирующей поверхности ультразвукового трансформатора скорости. Методика расчета резонансных размеров ультразвуковых диспергаторов изложена в ряде работ, например [1—3]. Однако, изложенные в работах методики не позволяют оценить зависимость массо-габаритных показателей диспергатора от места расположения пьезоэлемента преобразователя. Следовательно, необходима методика расчета, позволяющая на начальных этапах проектирования оценивать основные характеристики пьезопреобразователя и вводить изменения с целью оптимизации показателей в желаемом направлении в зависимости от поставленной задачи. Данным требо-

ваниям отвечает методика, изложенная в [4]. Однако она позволяет рассматривать только случаи, в которых составными частями пьезопреобразователя являются стержни постоянного сечения.

Целью данной статьи является представление методики, лишенной указанных недостатков и позволяющей получить рациональные характеристики пьезопреобразователей на стадии проектирования.

**Математическая модель**

В предлагаемой модели используется обратная или инверсная система электромеханических аналогий, представленная в [4].

Рассмотрим стержень длиной  $l$ , площадь поперечного сечения которого изменяется в соответствии с функцией  $S(x)$ . Рассмотрим случай, когда функция  $S(x)$  монотонно убывает или возрастает и не имеет скачков, т.е. первая производная функции  $S(x)$  по  $dx$  также монотонно возрастает или убывает и не имеет точек разрыва. В случае, если данное условие не выполняется, стержень можно разбить на несколько составных частей, для которых будет выполняться условие

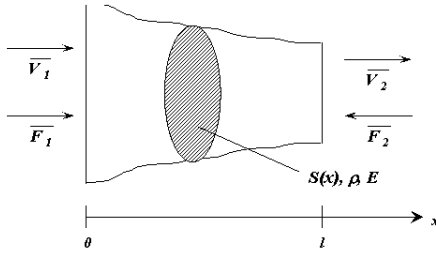
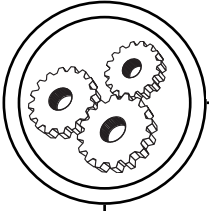


Рис. 1. Расчетная схема колебаний стержня переменного сечения

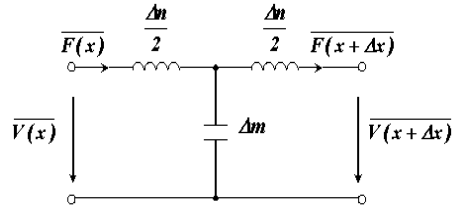


Рис. 2. Схема участка эквивалентной длинной линии

монотонного убывания или возрастания функции  $S(x)$ .

Пусть на торцы стержня действуют силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ , а также колебательные скорости  $\bar{V}_1$  и  $\bar{V}_2$ , материал стержня характеризуется плотностью  $\rho$  и модулем Юнга  $E$  (рис. 1).

Согласно [5], стержень можно представить в виде эквивалентной длинной линии. При этом элемент длинной линии имеет вид, представленный на рис. 2, где  $m$  и  $n$  — масса и податливость участка стержня малой длины  $\Delta x$ , соответствующие эквивалентным емкости и индуктивности.

Приращения массы и податливости можно связать следующими зависимостями:

$$\Delta m = \rho S(x) \Delta x = m' \Delta x;$$

$$\Delta n = \frac{1}{S(x)E} \Delta x = n' \Delta x,$$

где  $m' = \rho S(x)$ ;

$$n' = \frac{1}{S(x)E}.$$

Приращения скорости и силы можно связать следующими равенствами:

для скорости

$$\frac{d\bar{V}}{dx} = -j\omega n' \bar{F}; \tag{1}$$

для силы

$$\frac{d\bar{F}}{dx} = -j\omega m' \bar{V}. \tag{2}$$

Продифференцировав оба уравнения, получим:

$$\frac{d^2 \bar{V}}{dx^2} = -j\omega \frac{d\bar{F}}{dx} n' - \dots$$

$$\dots - j\omega \frac{dn'}{dx} \bar{F};$$

$$\frac{d^2 \bar{F}}{dx^2} = -j\omega \frac{d\bar{V}}{dx} m' - \dots$$

$$\dots - j\omega \frac{dm'}{dx} \bar{V}.$$

Подставляя (1), (2) в последние выражения, получим два дифференциальных уравнения второго порядка для скорости и силы соответственно:

$$\frac{d^2 \bar{V}}{dx^2} - \frac{1}{n'} \frac{dn'}{dx} \frac{d\bar{V}}{dx} + \dots$$

$$\dots + \omega^2 n' m' = 0; \tag{3}$$

$$\frac{d^2 \bar{F}}{dx^2} - \frac{1}{m'} \frac{dm'}{dx} \frac{d\bar{F}}{dx} + \dots$$

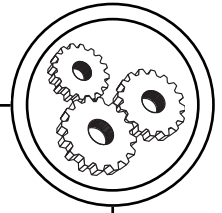
$$\dots + \omega^2 n' m' = 0.$$

С учетом того, что

$$\omega^2 n' m' = \frac{\omega^2}{\rho} = \frac{\omega^2}{c^2};$$

$$\frac{1}{n'} \frac{dn'}{dx} = \frac{-1}{S(x)} \frac{dS(x)}{dx};$$

$$\frac{1}{m'} \frac{dm'}{dx} = \frac{1}{S(x)} \frac{dS(x)}{dx},$$



из (3) получим два дифференциальных уравнения для силы и скорости соответственно, описывающих колебания стержня переменного сечения:

$$\frac{d^2 \bar{F}}{dx^2} - \left( \frac{1}{S(x)} \frac{dS(x)}{dx} \right) \frac{d\bar{F}}{dx} + \dots$$

$$\dots + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{F} = 0;$$

$$\frac{d^2 \bar{V}}{dx^2} + \left( \frac{1}{S(x)} \frac{dS(x)}{dx} \right) \frac{d\bar{V}}{dx} + \dots$$

$$\dots + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{V} = 0.$$

Приняв для удобства записи  $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2$  и  $\frac{1}{S(x)} \frac{dS(x)}{dx} = 2s$ , после подстановки получим:

$$\frac{d^2 \bar{F}}{dx^2} - 2s \frac{d\bar{F}}{dx} + k^2 \bar{F} = 0;$$

$$\frac{d^2 \bar{V}}{dx^2} + 2s \frac{d\bar{V}}{dx} + k^2 \bar{V} = 0.$$

Решения полученных дифференциальных уравнений находим при следующих граничных условиях на торцах стержня:

$$\overline{F(0)} = \overline{F_1}, \quad \overline{F(l)} = \overline{F_2};$$

$$\overline{V(0)} = \overline{V_1}, \quad \overline{V(l)} = \overline{V_2};$$

$$\overline{S(0)} = \overline{S_0}; \quad \overline{S(l)} = \overline{S_1}.$$

Решение уравнения для скорости будем искать в виде

$$\overline{V(x)} = A_1 e^{\gamma_1 x} + A_2 e^{\gamma_2 x},$$

где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — корни характеристического уравнения  $\gamma^2 + 2s\gamma + k^2 = 0$ .

Решая характеристическое уравнение, получим:

$$\gamma_1 = -s + j\sqrt{k^2 - s^2} = -\alpha + j\beta;$$

$$\gamma_2 = -s + j\sqrt{k^2 - s^2} = -\alpha - j\beta.$$

Ограничимся рассмотрением случаев, когда логарифмическая производная  $S(x)$  много меньше  $k$ . В таком случае можно принять, что  $\gamma_1, \gamma_2 \approx \text{const}$ .

Таким образом, решая дифференциальные уравнения и записывая результат в матричной форме, получим

$$\begin{bmatrix} \overline{V_1} \\ \overline{F_1} \end{bmatrix} = \frac{e^{\alpha l}}{\beta_l \cos(\beta_l l)} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \beta_l - \alpha_l \text{tg}(\beta_l l) \\ jS(0)E \left[ (\alpha_l \alpha_0 + \beta_l \beta_0) \text{tg}(\beta_l l) - \right. \\ \left. - (\alpha_0 \beta_l - \alpha_l \beta_0) \right] \\ \frac{j\omega}{S(l)E} \text{tg}(\beta_l l) \\ \frac{S(0)}{S(l)} (\beta_0 + \alpha_0 \text{tg}(\beta_l l)) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \overline{V_2} \\ \overline{F_2} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Полученное матричное выражение, называемое в [4] А-матрицей, позволяет исследовать поведение стержней переменного сечения.

Рассмотрим несколько случаев, имеющих большое практическое значение, в частности, короткий стержень, стержень с экспоненциальным законом изменения сечения и стержень постоянного сечения.

В случае короткого стержня можно принять, что

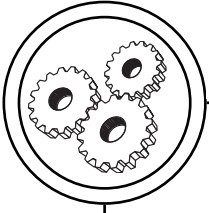
$$\text{tg}(\beta_l) \approx \beta_l$$

Входной админтанс стержня в случае акустического холостого хода

$$h_{ax} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{\beta_l - \alpha_l \text{tg}(\beta_l l)}{jS(0)E} \dots$$

$$\dots \frac{1}{\omega} \frac{(\alpha_l \alpha_0 + \beta_l \beta_0) \text{tg}(\beta_l l) - \dots}{\dots - (\alpha_0 \beta_l - \alpha_l \beta_0)}$$

где  $a_{11}, a_{22}$  — соответствующие коэффициенты А-матрицы (5).



С учетом того, что  $E = c^2\rho$  после подстановки вместо тангенса малого угла величины угла, получаем

$$h_{ax} = \frac{\beta_l - \alpha_l \beta_l l}{jS(0)c^2\rho} \dots$$

$$\dots \frac{1}{(\alpha_l \alpha_0 + \beta_l \beta_0) \beta_l l - \dots}$$

$$\dots - (\alpha_0 \beta_l - \alpha_l \beta_0)$$

Так как  $S(0)c^2\rho = M(0)$ , где масса стержня постоянного сечения с площадью сечения  $S(0)$  и  $\frac{c^2}{\omega^2} = \frac{1}{k^2}$ ,

получаем

$$h_{ax} = \frac{1}{j\omega M_0 \left[ 1 - \frac{\alpha_0}{kl} - \frac{\alpha_l}{k^2 l} + \frac{\alpha_l \alpha_0}{k^2} \right]}$$

Как видим, короткий стержень переменного сечения можно представить как массу стержня постоянного сечения с небольшим поправочным коэффициентом

$$g = -\frac{\alpha_0}{kl} - \frac{\alpha_l}{k^2 l} + \frac{\alpha_l \alpha_0}{k^2}$$

Пусть площадь стержня изменится по экспоненциальному закону

$$S(x) = Se^{-2mx}$$

Тогда вспомогательные переменные равны

$$s = \frac{1}{S(x)} \frac{dS(x)}{dx} = -m;$$

$$\beta = \sqrt{k^2 - m^2}.$$

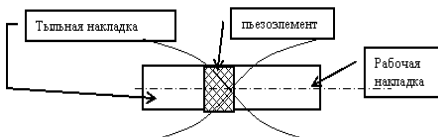


Рис. 3. Полуволновой пьезопреобразователь

С учётом этого

$$\begin{bmatrix} \overline{V}_1 \\ \overline{F}_1 \end{bmatrix} = \frac{e^{-m l}}{\beta} \begin{bmatrix} \beta \cos(\beta l) + m \sin(\beta l) \\ j \frac{SE}{\omega} k^2 \sin(\beta l) \\ j \frac{\omega}{Se^{-2ml} E} \sin(\beta l) \\ e^{2ml} (\beta \cos(\beta l) - m \sin(\beta l)) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \overline{V}_2 \\ \overline{F}_2 \end{bmatrix}.$$

Пусть площадь стержня изменится по закону  $S(x) = S$ .

При этом вспомогательная переменная равна

$$s = \frac{1}{S(x)} \frac{dS(x)}{dx} = 0.$$

Приняв, что

$$\overline{h}_z = \frac{1}{S} \frac{1}{\sqrt{\rho E}}$$

$$\gamma = j \frac{\omega}{c} = \frac{j\omega}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} = j\beta,$$

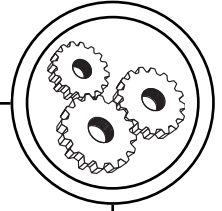
где  $j$  — мнимая единица,  $\beta$  — фазовая постоянная распространения упругих колебаний, получим

$$\begin{bmatrix} \overline{V}_1 \\ \overline{F}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) \\ j \frac{1}{h_z} \sin(\beta l) \\ j \overline{h}_z \sin(\beta l) \\ \cos(\beta l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{V}_2 \\ \overline{F}_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Как видим, полученная матрица аналогична матрице, описывающей процессы в длинной линии постоянного сечения без потерь.

**Аналитическое исследование**

Возможны два подхода к анализу резонансных характеристик пьезопреобразователя: со стороны электрических зажимов пьезоэлемента,



когда пьезопреобразователь рассматривается как активная колебательная система [6], и со стороны тыльной накладки, когда пьезопреобразователь рассматривается как пассивная колебательная система [1]. Очевидно, что оба подхода должны при расчетах давать одинаковые длины накладок пьезопреобразователя при заданных резонансной частоте и толщине пьезоэлемента, а также заданных параметрах материалов накладок.

Для анализа воспользуемся вторым подходом. Выразим параметры тыльной накладки через параметры рабочей накладки. Для удобства записи введем понятие угловой длины стержня:

$$\alpha = \frac{\omega_0}{c} l,$$

где  $\alpha$  — угловая длина стержня,  $\omega_0$  — частота,  $c$  — скорость звука в материале стержня,  $l$  — длина стержня.

Расчеты проведем на примере полуволнового преобразователя, показанного на рис. 3.

В случае полуволнового преобразователя с ненагруженными накладками можем записать для свободных торцов частотопонижающих накладок, что  $\bar{F}_T = \bar{F}_P = 0$ . Следовательно, входной админтанс рабочей на-

кладки со стороны пьезоэлемента согласно (6) равен

$$h_{вхр} = -j h_p \text{ctg} \alpha_p.$$

Входной админтанс пьезоэлемента со стороны тыльной накладки равен

$$h_{вхк} = -j \frac{h_p \text{ctg} \alpha_p - h_k \text{tg} \alpha_k}{1 + \frac{h_p}{h_k} \text{ctg} \alpha_p \text{tg} \alpha_k}.$$

Входной админтанс тыльной накладки равен

$$h_{вхТ} = -j \frac{h_p \text{ctg} \alpha_p - h_k \text{tg} \alpha_k - \left(1 + \frac{h_p}{h_k} \text{ctg} \alpha_p \text{tg} \alpha_k\right) \dots - h_T \text{tg} \alpha_T \left(1 + \frac{h_p}{h_k} \text{ctg} \alpha_p \text{tg} \alpha_k\right) \dots}{\dots + \frac{\text{tg} \alpha_T}{h_T} (h_p \text{ctg} \alpha_p - h_k \text{tg} \alpha_k)}$$

Исходя из условия  $\bar{F}_T = 0$  следует, что знаменатель выражения для  $h_{вхТ}$  также равен нулю.

Откуда

$$\left(1 + \frac{h_p}{h_k} \text{ctg} \alpha_p \text{tg} \alpha_k\right) + \dots + \frac{\text{tg} \alpha_T}{h_T} (h_p \text{ctg} \alpha_p - h_k \text{tg} \alpha_k) = 0$$

Выразим параметры тыльной накладки через параметры пьезоэлемента и параметры рабочей накладки:

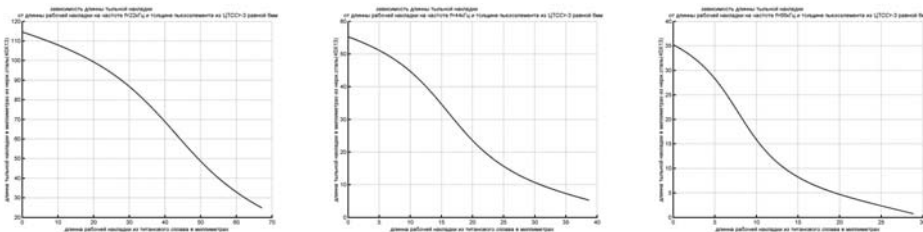


Рис. 4. Зависимость длины тыльной накладки от длины рабочей накладки для частот 22, 44, 66 кГц

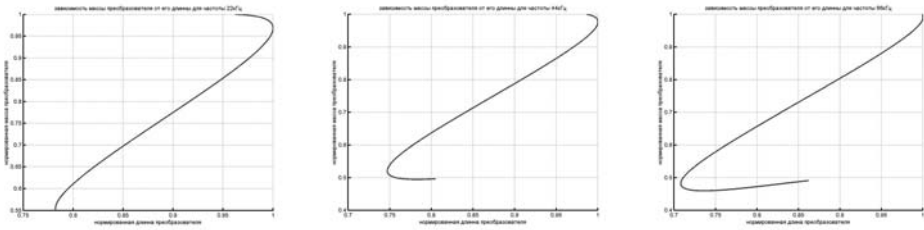
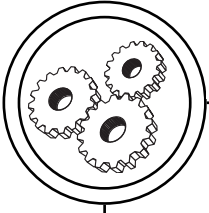


Рис. 5. Зависимость нормированной массы преобразователя от нормированной длины преобразователя для частот 22, 44, 66 кГц

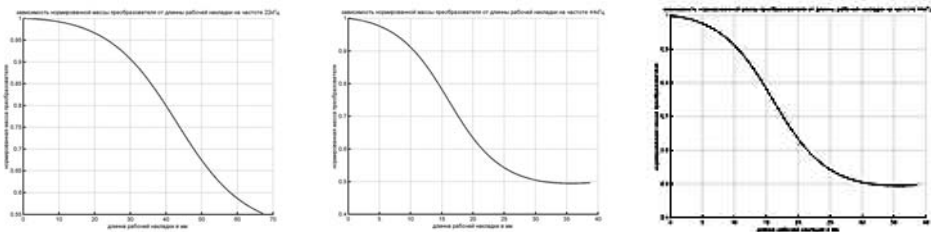


Рис. 6. Зависимость нормированной массы преобразователя от длины рабочей накладки для частот 22, 44, 66 кГц

$$\alpha_T = \text{arctg} \left[ h_T \frac{1 + \frac{h_p}{h_k} \text{ctg} \alpha_p \text{tg} \alpha_k}{h_k \text{tg} \alpha_k - h_p \text{ctg} \alpha_p} \right]$$

Откуда длина тыльной накладки:

$$l_T = \frac{c_T}{\omega_0} \text{arctg} \left[ h_T \frac{1 + \frac{h_p}{h_k} \text{ctg} \alpha_p \text{tg} \alpha_k}{h_k \text{tg} \alpha_k - h_p \text{ctg} \alpha_p} \right]$$

На основании полученных выражений можно построить номограммы для расчета резонансных размеров тыльной и рабочей накладок, исходя из выбранной резонансной частоты, толщины пьезоэлемента и материалов пьезокерамики, тыльной и рабочей накладок.

Найдем максимальную длину рабочей накладки с учетом того, что длина тыльной накладки при этом равна нулю:

$$\alpha_{p \max} = \text{arcc} \text{tg} \left[ -\frac{h_k}{h_p} \text{ctg} \alpha_k \right]$$

Следовательно, максимальная длина рабочей накладки равна

$$l_{p \max} = \frac{c_p}{\omega_0} \text{arcc} \text{tg} \left[ -\frac{h_k}{h_p} \text{ctg} \left( \frac{\omega_0}{c_k} l_k \right) \right]$$

Варьируя длину рабочей накладки от  $l_p = 0$  до  $l_p = l_{p \max}$ , можем построить номограммы для расчета длин тыльной и рабочей накладок при произвольном выборе места расположения пьезоэлемента. Номограммы для расчета приведены на рис. 4.

На рис. 5 и 6 приведены основные массо-габаритные показатели пьезопреобразователя в зависимости от места расположения пьезоэлемента.

**Экспериментальное исследование**

Для проверки правильности предложенной методики были из-

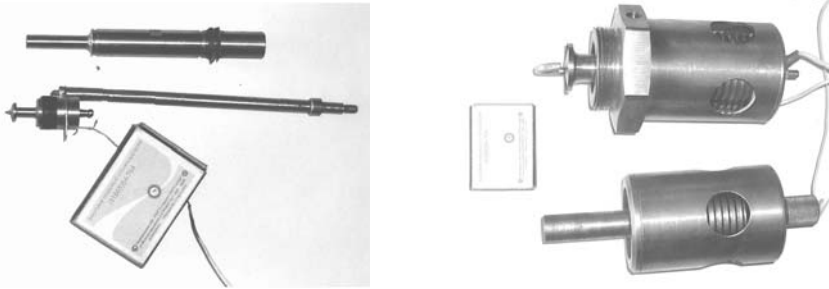
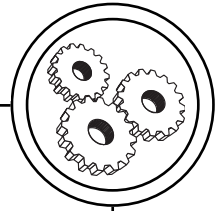


Рис. 7. Экспериментальные образцы пьезопреобразователей

готовлены экспериментальные образцы пьезопреобразователей, показанные на рис. 7. При этом измерение резонансных частот преобразователей показало расхождение от расчетных в пределах 6 %, что лежит в пределах допусков на параметры исходных материалов.

#### Выводы

Предлагаемая методика расчета хорошо согласуется с экспериментальными результатами и позволяет повысить точность расчетов благодаря возможности получения но-

вых дополнительных параметров, а также обеспечить более рациональный выбор параметров пьезопреобразователя по массо-габаритным показателям. Использование результатов данной работы может быть расширено и на другие области применения пьезопреобразователей, например, на устройства ударной обработки поверхностей металлов и сварных соединений, где в качестве источников вибраций применяются ультразвуковые преобразователи.

1. Луговской А. Ф. Расчет ультразвуковых диспергаторов с составными пьезоэлектрическими преобразователями. — В кн.: Вестник Национального технического университета Украины («КПИ»). Серия машиностроение. — К.: ВІПОЛ. — 1998. — Вып. 33. — С. 291—296.
2. Луговський О. Ф., Чорний В. І. Методика розрахунку ультразвукового диспергатора з радіально-згинними коливаннями до систем підготовки паливно-повітряної суміші. — В кн.: Вестник национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт». Серия машиностроение. — К. — 1999. — Вып. 34. — С. 79—87.
3. Подводные электроакустические преобразователи. (Расчет и проектирование): Справочник / В. В. Богородский, Л. А. Зубарев, Е. А. Корепин, В. И. Якушев. — Л.: Судостроение. — 1983. — 248 с., ил. — (Библиотека инженера-гидроакустика). — ИСБН.
4. Методика расчета стержневого преобразователя, нагруженного жидкой средой. В кн.: Вестник национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт». Серия машиностроение. — К. — 2002. — Вып. 38. — Том 2.
5. Козловский В. В., Сошников В. И. Устройства на неоднородных линиях. — К.: Техніка. — 1987. — 191 с., ил. — Библиогр.: С. 186—189.
6. Ультразвуковые пьезопреобразователи для неразрушающего контроля / Под общ. Ред. И. Н. Ермолова. — М.: Машиностроение. — 1985. — 280 с., ил.

Надійшла до редакції 5.10.04